Corrigé exercice 138 :

1. a. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-(3+\mathrm{i}))^2-8-6\mathrm{i} = z^2-2z(3+\mathrm{i})+8-6\mathrm{i}-8-6\mathrm{i} = z^2-(6+2\mathrm{i})z$.

   b. Ainsi, $(E) \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2-8-6\mathrm{i}+7+6\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2=1$.

   c. $(E) \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2 = 1 \Leftrightarrow z-(3+\mathrm{i}) = -1$ ou $z-(3+\mathrm{i}) = 1 \Leftrightarrow z = 2+\mathrm{i}$ ou $z = 4+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \{2+\mathrm{i}; 4+\mathrm{i}\}$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2+(2+4\mathrm{i})z = z^2+2(1+2\mathrm{i})z = [z+(1+2\mathrm{i})]^2-(1+2\mathrm{i})^2 = [z+(1+2\mathrm{i})]^2-(1-4+4\mathrm{i}) = [z+(1+2\mathrm{i})]^2+3-4\mathrm{i}$.

   Donc $(E) \Leftrightarrow [z+(1+2\mathrm{i})]^2+3-4\mathrm{i}+6+4\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow [z+(1+2\mathrm{i})]^2=-9 \Leftrightarrow z+(1+2\mathrm{i}) = -3\mathrm{i}$ ou $z+(1+2\mathrm{i}) = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -1-5\mathrm{i}$ ou $z = -1+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \{-1-5\mathrm{i}; -1+\mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 142 :

1. $z' = \dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z\times\overline{z}+1}$ existe si, et seulement si, $z\times\overline{z}+1 \neq 0$.

   Or $z\times\overline{z}+1 = 0 \Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = -1 \Leftrightarrow x^2+y^2=-1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Ainsi, z' est défini pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.

2. On cherche $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec x et y réels, tel que $z' = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z\times\overline{z}+1} = 1$ $\Leftrightarrow 2\mathrm{i}-z^2 = z\times\overline{z}+1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}-(x+\mathrm{i}y)^2 = x^2+y^2+1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}-(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy) = x^2+y^2+1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}-x^2+y^2-2\mathrm{i}xy = x^2+y^2+1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}(1-xy) = 2x^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-xy=0 \\ 2x^2+1=0 \end{cases}$,
   car le seul nombre à la fois imaginaire pur et réel est le nombre 0. Ce système n'a pas de solution car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2+1>0$. Ainsi, il n'existe pas de valeur de z telle que $z'=1$.

3. a. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z\times\overline{z}+1}\right)} = \dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z\times\overline{z}+1} \Leftrightarrow \dfrac{-2\mathrm{i}-\overline{z}^2}{\overline{z}\times\overline{(\overline{z})}+1} = \dfrac{2\mathrm{i}-z^2}{z\times\overline{z}+1}$ par compatibilité de la conjugaison avec l'addition, la multiplication et l'opérateur puissance, d'où $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2\mathrm{i}-\overline{z}^2 = 2\mathrm{i}-z^2$ car $\overline{(\overline{z})} = z$, et donc $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2 = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 4\mathrm{i}$.

   b. $(z+\overline{z})(z-\overline{z}) = 2\mathrm{Re}(z)\times 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2x\times 2\mathrm{i}y = 4\mathrm{i}xy$. Ainsi, $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z+\overline{z})(z+\overline{z}) = 4\mathrm{i}xy = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow xy = 1$. Par conséquent, $M(x;y) \in E_1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ et $x \neq 0$. Ainsi, E_1 est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.

4. On écrit z' sous forme algébrique.
   $z' = \dfrac{2\mathrm{i}-(x+\mathrm{i}y)^2}{x^2+y^2+1} = \dfrac{2\mathrm{i}-(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)}{x^2+y^2+1} = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2+1}+\mathrm{i}\dfrac{2(1-xy)}{x^2+y^2+1}$. Ainsi, $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow y^2-x^2=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=0 \Leftrightarrow y=-x$ ou $y=x$. Ainsi, E_2 est la réunion des droites d'équation $y=-x$ et $y=x$.